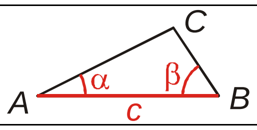
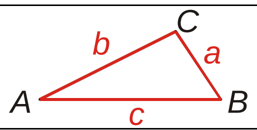
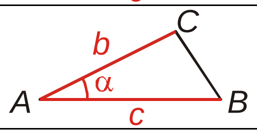
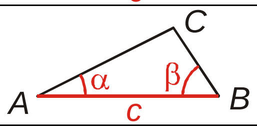
2.4.7 Shodnosti trojúhelníků II

Předpoklady: 020406

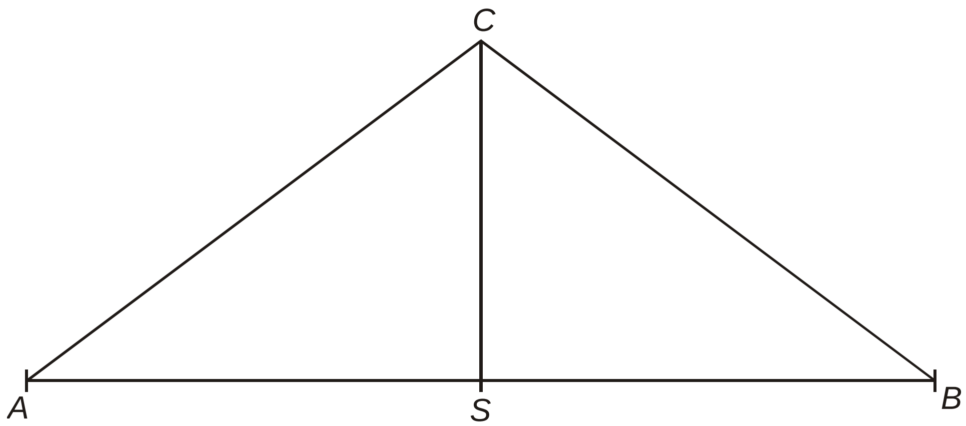
Př. 1: Doplň tabulku.

Zadání		
sss		
		$\alpha < 180°$
		

Zadání	**Náčrtek**	**Podmínky**
sss		$a+b>c$ $b+c>a$ $a+c>b$
sus		$\alpha < 180°$
usu		$\alpha + \beta < 180°$

Pedagogická poznámka: Původní tabulka v zadání neměla stejně široké řádky (použil jsem standardní nastavení tabulek ve Wordu), což vedlo žáky k tomu, že poslední řádek je určen na obrázky. Že pak nedával smysl první řádek nikomu nepřišlo zdaleka tak důležité.

Př. 2: Narýsuj libovolný rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB*. Sestroj střed *S* strany *AB*. Co platí pro trojúhelníky *ASC* a *BSC*? Dokaž. Jakou roli hraje v trojúhelníku úsečka *SC*? Dokaž.



Zdá se, že platí $ASC \cong BSC$. Musíme to však dokázat pomocí některé z vět o shodnosti trojúhelníků. Hledáme shodné strany a úhly:

- SC je společná strana obou trojúhelníků (je shodná sama se sebou),
- $|AS| = |BS|$ (bod *S* je střed strany *AB*),
- $|AS| = |BS|$ (trojúhelník *ABC* je rovnoramenný trojúhelník se základnou *AB*, strany *AS* a *BS* jsou ramen),

platí $\Rightarrow$ $ASC \cong BSC$ posle věty *sss*.

Zdá se, že úsečka *SC* je osou trojúhelníku *ABC*. Potřebujeme dokázat, že úsečka *SC* je kolmá na stranu *AB*.

Platí: $|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle BSC|$ (odpovídající si úhly ve shodných trojúhelnících), platí

$|\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle BSC| = 180°$ (úhel ASB je přímý).

$$|\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle ASC| = 2|\sphericalangle ASC| = 180°$$

$$|\sphericalangle ASC| = 90°$$

$\Rightarrow$ úsečka *SC* je kolmá na základnu *AB* $\Rightarrow$ je osou trojúhelníku.

Pedagogická poznámka: Značná část žáků bude dokazovat shodnost trojúhelníků pomocí shodnosti úhlu *ASC* a *BSC* (případně kolmosti úsečky *SC* na stranu *AB*). Ani jednu z těchto informací však nemáme ověřenou.

Př. 3: Rozhodni, zda jsou pravdivé následující věty. Rozhodnutí zdůvodni.
a) Každé dva rovnoramenné trojúhelníky, které se shodují v jednom rameni a základně jsou shodné.
b) Dva rovnostranné trojúhelníky, které se shodují v jedné straně, jsou shodné.
c) Dva trojúhelníky, které se shodují ve třech úhlech, jsou shodné.
d) Dva pravoúhlé trojúhelníky které se shodují v jedné straně a jednom nepravém úhlu jsou shodné.

a) Každé dva rovnoramenné trojúhelníky, které se shodují v jednom rameni a základně jsou shodné.

Pravda. Dva trojúhelníky, které se shodují v jednom rameni, se musí shodovat v obou ramenech (ramena u rovnoramenného trojúhelníku jsou shodná) $\Rightarrow$ trojúhelníky se shodují ve střech stranách $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty *sss*.

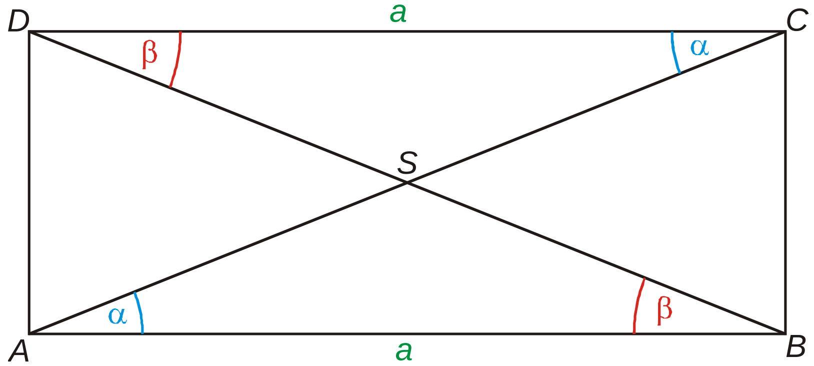
b) Dva rovnostranné trojúhelníky, které se shodují v jedné straně, jsou shodné.
Pravda. Všechny strany rovnostranného trojúhelníku jsou shodné $\Rightarrow$ pokud se dva rovnostranné trojúhelníky shodují v jedné straně, shodují se ve všech třech stranách $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty *sss*.

c) Dva trojúhelníky, které se shodují ve třech úhlech, jsou shodné.
Nepravda. Neexistuje věta o shodnosti *uuu*. Shoda ve třetím úhlu není žádnou novou informací (pokud se trojúhelníky shodují ve dvou úhlech, musí se kvůli součtu velikostí shodovat i ve třetím). Trojúhelníky se budou shodovat ve tvaru, ale nemusí být stejně velké (velikosti úhlu neurčují velikost trojúhelníku).

d) Dva pravoúhlé trojúhelníky které se shodují v jedné straně a jednom nepravém úhlu jsou shodné.
Pravda. Pokud se pravoúhlé trojúhelníky shodují v nepravém úhlu, shodují se ve všech třech úhlech (druhým společným úhlem je pravý úhel) a tedy i v obou úhlech přilehlých ke shodné straně $\Rightarrow$ trojúhelníky jsou shodné podle věty *usu*.

Př. 4: Dokaž, že úhlopříčky obdélníku se navzájem půlí. Platí tento důkaz i pro rovnoběžníky?

Jedna z možností, jak dokázat shodnost dvou úseček: dokázat, že jsou to odpovídající si strany ve shodných trojúhelnících.
Nakreslíme si obrázek obdélníku. Hledáme shodné úsečky a úhly, využitelné na některou z vět os shodnosti.



Shodují se:

- strany *AB* a *CD* (protější strany obdélníku),
- úhly *BAC* a *ACD* (střídavé úhly, přímka *AC* protíná rovnoběžky *AB* a *CD*),
- úhly *ABD* a *BDC* (střídavé úhly, přímka *BD* protíná rovnoběžky *AB* a *CD*),

$\Rightarrow$ trojúhelník *ABS* je shodný s trojúhelníkem *CDS* $\Rightarrow$

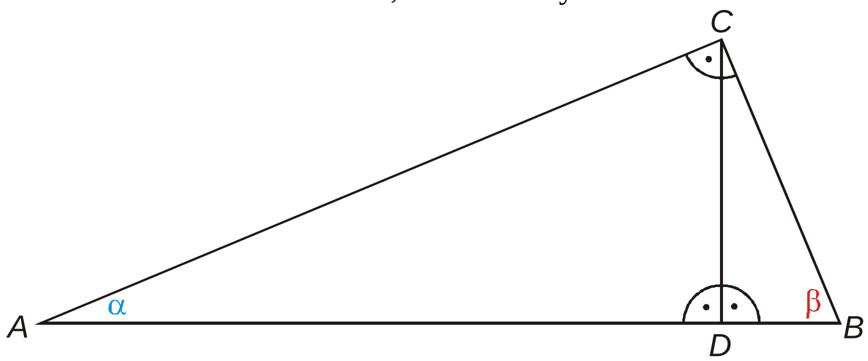
- jsou shodné i strany *AS* a *CS* (a tedy bod *S* dělí úhlopříčku *AC* na dvě stejné poloviny),
- jsou shodné i strany *BS* a *DS* (a tedy bod *S* dělí úhlopříčku *BD* na dvě stejné poloviny).

$\Rightarrow$ úhlopříčky s obdélníku se půlí.

V rovnoběžníku *ABCD* budou předchozí závěry platit také, platí všechny předpoklady, které jsme v důkazu využili (shodnost stran *AB* a *CD* i rovnosti úhlu označených obrázku α a β (u rovnoběžníku neplatí na rozdíl od obdélníku $\alpha = \beta$, ale tuto vlastnost jsme v důkazu nepoužili).

Př. 5: Tonda přišel domů z matematiky se zajímavým problémem. Narýsovali libovolný nerovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a sestrojili v něm výšku přeponu. Délku kratší odvěsny přenesli na jednu ze zbývajících stran a pak udělali kolmici. Získali tak trojúhelník, který byl shodný s menším trojúhelníkem, který vytvořili narýsováním výšky. Tonda si bohužel nepamatuje, na kterou ze zbývajících stran má délku přenést a na jakou stranu udělat kolmici. Ze čmáranice, kterou má v sešitu to vyčíst nejde. Vyřeš jeho problém. Kolika způsoby je možné konstrukci provést?

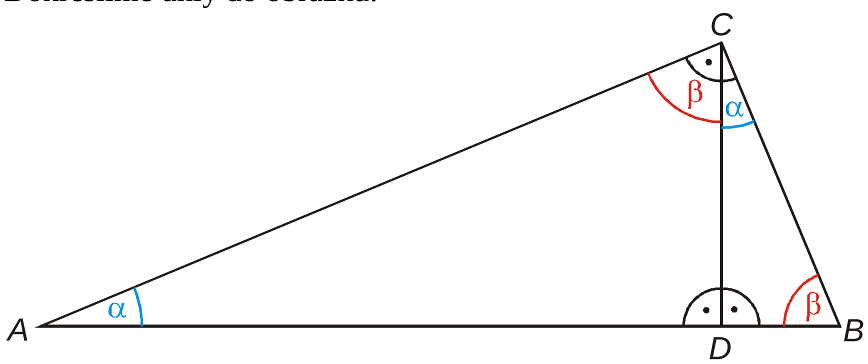
Zakreslíme situaci do obrázku, volíme velký rozdíl v délce odvěsen.



Velikost úhlu *DCA*: $180° = 90° + \alpha + x \Rightarrow x = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$.
Velikost úhlu *DCB*: $90° = 90° - \alpha + y \Rightarrow y = \alpha$.

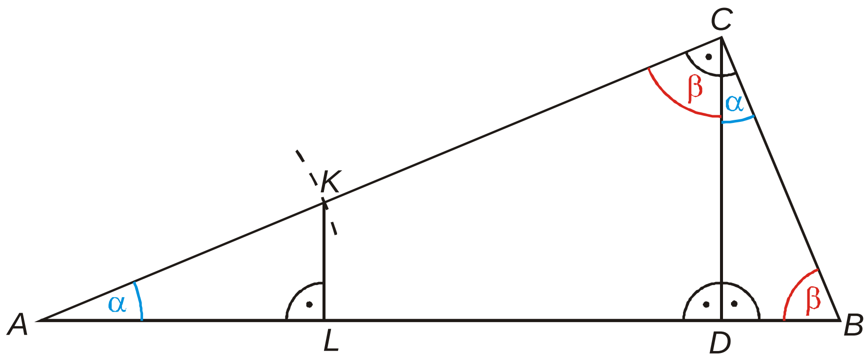
Z trojúhelníku *DCB* je vidět, že $\beta = 90 - \alpha \Rightarrow |\sphericalangle DCA| = 90 - \alpha = \beta$.

Dokreslíme úhly do obrázku:



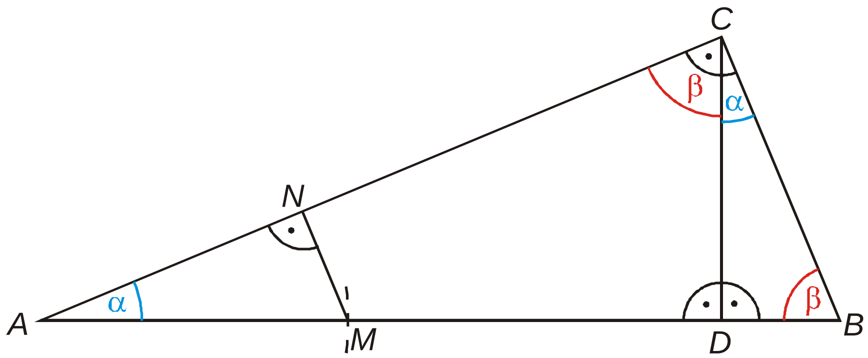
Prohlédneme si trojúhelník *CBD* (sestrojovaný trojúhelník má být shodný s ním): strana *BC* hraje v trojúhelníku roli přepony a leží tedy proti pravému úhlu $\Rightarrow$ přenesená strana bude muset ve shodném trojúhelníku ležet proti pravému úhlu.

Zkusíme přenést stranu *BC* na stranu *AC* (získáme tak bod *K*). Pravý úhel musí ležet proti bodu *K* $\Rightarrow$ z bodu *K* vedeme kolmici na stranu *AB*.



Získáme trojúhelník *AKL*, který je shodný s trojúhelníkem *CBD* podle věty *usu*.

Zkusíme přenést stranu *BC* na stranu *AB* (získáme tak bod *M*). Pravý úhel musí ležet proti bodu *M* $\Rightarrow$ z bodu *M* vedeme kolmici na stranu *AV*.

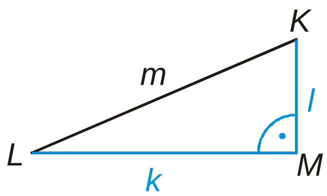


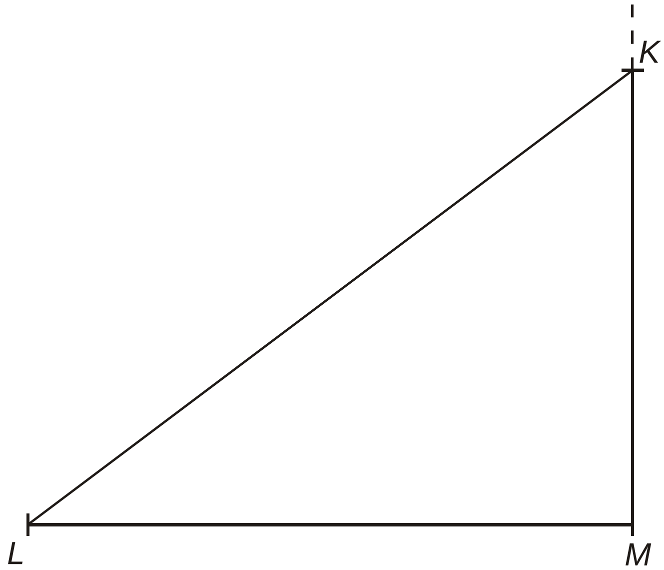
Získáme trojúhelník *AMN*, který je shodný s trojúhelníkem *CBD* podle věty *usu*.

Shodný trojúhelník můžeme narýsovat dvěma způsoby. Přeneseme kratší stranu na jednu ze zbývajících stran a ze vzniklého bodu uděláme kolmici na třetí stranu.

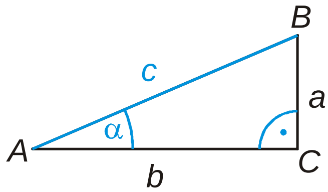
Př. 6: a) Narýsuj pravoúhlý trojúhelník *KLM* o délce odvěsen $k = 8\,\text{cm}$ a $l = 6\,\text{cm}$.
b) Narýsuj pravoúhlý trojúhelník *ABC* o délce přepony $c = 10\,\text{cm}$ a úhlu $\alpha = 37°$.
Jsou trojúhelníky shodné?

a) Narýsuj pravoúhlý trojúhelník *KLM* o délce odvěsen $k = 8\,\text{cm}$ a $l = 6\,\text{cm}$.

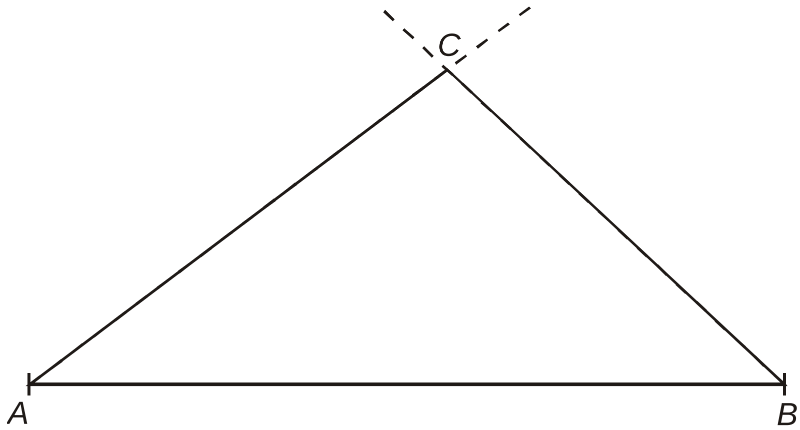




b) Narýsuj pravoúhlý trojúhelník *ABC* o délce přepony $c = 10\,\text{cm}$ a úhlu $\alpha = 37°$.



Dopočteme úhel β a začneme rýsovat od strany *c*.
Dopočtení chybějícího úhlu β: $180° - 90° - 37° = 43°$.



Jsou trojúhelníky shodné?
V rámci přesnosti našeho měření se shodné být zdají (shodují se ve všech stranách i úhlech).
Ve skutečnosti však shodné nejsou, při přesnějším měření bychom zjistili, že úhel KLM který odpovídá úhlu α má velikosti (opět jen přibližně) $36°52'$.

Dodatek: Skutečnost, že trojúhelníky v předchozím příkladu shodné nejsou si žáci mohou ověřit na papírku, kde jsou oba trojúhelníky položeny přes sebe.

Shrnutí: